

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1951 - 023

Voordracht in de serie Actualiteiten

C.G. Lekkerkerker

24 november 1951

Stapelring van bollen



1951

Voordracht door C.G. Lekkerkerker in de serie
Actualiteiten op 24 November 1951.

Stapelning van bollen.

1. Zij in R_n een rechthoekig assenstelsel gegeven. Laat $K(w)$ een of andere kubus zijn, waarvan de ribben evenwijdig lopen aan de coördinaatassen en lengte w hebben.

Zij voorlopig $w > 2$. Wanneer we in het vervolg over bollen spreken, zonder nadere aanduiding, dan bedoelen we daarmee n -dimensionale hypersferen in R_n met straal 1. De inhoud van een bol geven we aan met ω_n .

Een verzameling bollen, die twee aan twee geen inwendig punt gemeen hebben, terwijl elke bol geheel in $K(w)$ bevat is, heet een $K(w)$ -bolstapelning. Het maximale aantal bollen in een $K(w)$ -bolstapelning is een functie van w alleen, voor te stellen door $A(w)$. We voeren nu in de grootheid

$$t(w) = w^{-n} A(w) \omega_n,$$

aangevende welk gedeelte van $K(w)$ maximaal bedekt is door bollen uit een $K(w)$ -bolstapelning. Uiteraard geldt: $0 \leq t(w) \leq 1$.

We bewijzen nu allereerst, dat $t(w)$ een limiet heeft voor $w \rightarrow \infty$.

Bewijs

1) Zij k een natuurlijk getal.

Een kubus met ribbe kw is samen te stellen uit k^n kubussen met ribbe w ; in ieder daarvan kunnen we $A(w)$ bollen stapelen; in de eerstgenoemde kubus kunnen we dus zeker $k^n A(w)$ bollen stapelen. Anders gezegd:

$$A(kw) \geq k^n A(w), \text{ ofwel } t(kw) \geq t(w).$$

2) Beschouwen we nu een stapeling van $A(kw)$ bollen in een kubus met ribbe kw ; verdelen we de kubus weer in k^n kubussen K_1 met ribbe w . We beschouwen de bollen in de stapeling, die met een bepaalde kubus K_1 althans een punt gemeen hebben. Ze zijn bevat in de met K_1 concentrische kubus met ribbe $w+4$. Zij hun aantal A_1 .

Het aantal A_1 van de bollen, die geheel in K_1 bevat zijn, is hoogstens gelijk aan $A(w)$. De bollen, die een randpunt van K_1 bevatten, $A_1 - A_1^1$ in aantal, zijn bevat in een gebied met inhoud

$$(w+4)^n - (w-4)^n < n \cdot 8(w+4)^{n-1}, \text{ dus is:}$$

$$\{A_1 - A(w)\} \omega_n < (A_1 - A_1^1) \omega_n < 8n(w+4)^{n-1}.$$

Er is dus ook een constante c_1 , zodat geldt:

$$\begin{aligned} \{A_i - A(w)\} \omega_n &< c_1 w^{n-1}, \\ \sum A_i \omega_n &< \frac{c_1}{w} (kw)^n + k^n A(w) \omega_n, \\ t(kw) &= (kw)^{-n} \sum A_i \omega_n < \frac{c_1}{w} + t(w). \end{aligned}$$

3) Met de methode, onder 2) uiteengezet, kunnen we ook bewijzen: er is een constante c_2 , zodat geldt:

$$0 < t(w_1) - t(w) < \frac{c_2}{w} \text{ voor } 0 < \frac{w}{w_1} < 1.$$

4) Zij $\varepsilon > 0$ gegeven. Bepaal w_0 , zodat geldt:

$$\frac{c_1}{w}, \frac{c_2}{w} < \frac{\varepsilon}{4} \text{ voor } w > w_0.$$

We beschouwen nu twee willekeurige getallen w_1, w_2 , beiden groter dan w_0 . Zij k_1 (k_2) het kleinste gehele getal, dat minstens gelijk is aan w_1 (w_2). Dan hebben we:

$$\begin{aligned} |t(w_1) - t(k_1)| &< \frac{\varepsilon}{4}, \quad |t(w_2) - t(k_2)| < \frac{\varepsilon}{4}, \\ |t(k_1) - t(k_1 k_2)| &< \frac{\varepsilon}{4}, \quad |t(k_2) - t(k_1 k_2)| < \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

dus $|t(w_1) - t(w_2)| < \varepsilon$.

D.w.z. $\lim t(w)$ bestaat.

We noemen die limiet de bedekkingsgraad ρ_n . Uit

$$t(w) \leq t(kw) \text{ volgt nog: } t(w) \leq \rho_n.$$

2. We willen ρ_n naar boven schatten. Triviaal is: $\rho_n \leq 1$.

We beschouwen een $K(w)$ -bolstapeling, bestaande uit bollen $B_1, \dots, B_s$. Elke bol B_i daaruit vervangen we door een concentrische bol P_i^* , aan elk punt P waarvan we een gewicht $\sigma(r_i)$ toekennen, alleen afhankelijk van de afstand $r_i = PP_i$ van P tot het middelpunt P_i ($i=1, \dots, s$). De functie $\sigma(r)$ wordt zo gekozen, dat voor elk punt P van de kubus $K(w)$ geldt: $\sum_{i=1}^s \sigma(r_i) \leq 1$.

Hulpstelling 1.

Laten $P_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn})$ de middelpunten van enige bollen uit een bolstapeling zijn ($j = 1, \dots, m$). Zij P een willekeurig punt van R_n en r_j de afstand van P_j tot P ($j = 1, \dots, m$). Dan geldt:

$$\sum_{j=1}^m r_j^2 \geq 2(m-1).$$

Bewijs:

Omdat afstanden invariant zijn voor translatie, mogen we onderstellen dat P de oorsprong is. Nu is voor $j \neq k$ de afstand van de punten P_j en P_k tenminste 2.

Dus:
$$\sum_{i=1}^n (x_{ji} - x_{ki})^2 \geq 4. \quad (j \neq k, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq m).$$

Voor $j = k$ is het linkerlid van de laatste ongelijkheid 0. We sommeren nu over alle j en k , en krijgen dan:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n (x_{ji}^2 + x_{ki}^2) - 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ji} x_{ki} &\geq 4m(m-1), \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m (r_j^2 + r_k^2) - 2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ji} x_{ki} &\geq 4m(m-1), \\ 2m \sum_{j=1}^m r_j^2 &\geq 4m(m-1), \end{aligned}$$

waaruit de hulpstelling volgt.

We kiezen nu de functie $\sigma(r)$ als volgt:

$$\sigma(r) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}r^2 & r \leq \sqrt{2} \\ 0 & \text{voor } r > \sqrt{2} \end{cases}$$

Beschouw een punt P van $K(w)$. Laten $B_1, \dots, B_m$ de bollen zijn, met de eigenschap dat de bijbehorende functiewaarden $\sigma(r_i)$ in het punt P positief zijn. Dan is:

$$\sum_{i=1}^m \sigma(r_i) = \sum_{i=1}^m (1 - \frac{1}{2}r_i^2) = m - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m r_i^2 \leq m - (m-1) = 1.$$

Elke bol B_i^* heeft straal $\sqrt{2}$. De bollen B_i^* zijn dus bevat in een kubus met ribbe $w+2(\sqrt{2}-1)$. Voor één bol is

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} \sigma(r) dx_1 \dots dx_n &= \int_0^{\sqrt{2}} \sigma(r) d(\omega_n r^n) = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} (1 - \frac{1}{2}r^2) d(\omega_n r^n) = \omega_n \left\{ 2 \cdot \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \frac{n}{n+2} 2^{\frac{n+2}{2}} \right\} = \frac{2\omega_n}{n+2} 2^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Er geldt derhalve:

$$\begin{aligned} (w+1)^n &> \int_{K(w)} \sum \sigma(r_i) dx_1 \dots dx_n = \\ &= A(w) \int_0^{\sqrt{2}} \sigma(r) dx_1 \dots dx_n = A(w) \omega_n \cdot \frac{2}{n+2} 2^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} t(w) &= w^{-n} A(w) \omega_n < (1 + \frac{1}{w})^n \frac{n+2}{2} 2^{-n/2}, \\ \text{dus } \rho_n &= \lim t(w) \leq \frac{n+2}{2} 2^{-n/2}, \text{ en ook } t(w) \leq \frac{n+2}{2} 2^{-n/2}. \end{aligned}$$

3. Zij x een willekeurig punt van R_n . Liggen ν punten van R_n niet in een $\nu-1$ -dimensionaal hypervlak door de oorsprong, dan noemen we ze vrij gelegen (ν een der getallen $1, \dots, n$). Een verzameling punten van R_n heet een rooster, als er een punt x en n vrij gelegen punten $a_1, \dots, a_n$ zijn, zodat de verzameling bestaat uit de punten z , die te schrijven zijn als $z = u_1 a_1 + \dots + u_n a_n + x$ ($u_1, \dots, u_n$ gehele getallen). We stellen het rooster voor door Γ_x of $\Gamma_x [a_1, \dots, a_n]$; de punten $a_1, \dots, a_n$ heten een basis te vormen van het rooster Γ_0 .

We beschouwen voortaan een speciaal soort $K(w)$ -bolstapelingen, nl. zulke, die bestaan uit alle bollen waarvan de middelpunten tot een of ander rooster Γ_x behoren, terwijl de bollen gestapeld zijn in een kubus $K(w)$. We spreken van een $\Gamma_x - K(w)$ -bolstapeling en noemen deze maximaal, als het aantal er toe behorende bollen maximaal is. Dit maximale aantal is weer een functie die alleen van w afhangt; we stellen het voor door $A^*(w)$. We voeren nog in de grootheid

$$t^*(w) = w^{-n} A^*(w) \omega_n.$$

Triviale schattingen voor $t^*(w)$ zijn ($w > 2$):

$$t^*(w) \leq t(w) < 1, \text{ en}$$

$$t^*(w) \geq w^{-n} \left[\frac{w}{2} \right]^n \omega_n > w^{-n} \left(\frac{w}{4} \right)^n \omega_n = 4^{-n} \omega_n.$$

De eerste volgt uit het feit, dat elke $\Gamma_x - K(w)$ -bolstapeling ook een $K(w)$ -bolstapeling is, zodat $A^*(w) \leq A(w)$ is. De tweede volgt, als we voor a_1 het punt nemen, waarvan de i^{de} coördinaat 2 is en de overige coördinaten 0 ($i = 1, \dots, n$), en daarmee het rooster opbouwen; bij geschikte keuze van x bevat dan de bijbehorende $\Gamma_x - K(w)$ -bolstapeling $\left[\frac{w}{2} \right]^n$ exemplaren.

Zij w groter dan een nader te bepalen constante c_3 , $K(w)$ een kubus met ribbe w . We beschouwen een maximale $\Gamma_x - K(w)$ -bolstapeling. Het rooster Γ_0 bevat onder meer het punt $0 = (0, 0, \dots, 0)$; twee verschillende punten uit dit rooster hebben afstand ≥ 2 . De afstand van een punt z tot 0 geven we aan met $|z|$. Zij nu $b_1 \neq 0$ een punt van Γ_0 , waarvoor $|b_1|$ minimaal is, en zij R_1 de door 0 en b_1 voortgebrachte deelruimte van R_n . Zij b_2 een punt van Γ_0 , zodat $b_2 \notin R_1$ en $|b_2|$ minimaal is, en zij R_2 de door $0, b_1, b_2$ voortgebrachte deelruimte. We definiëren vervolgens $b_3, R_3, \dots, b_n, R_n$. Voor $\nu = 1, \dots, n-1$ geldt dan: van de punten van Γ_0 buiten R_ν heeft $b_{\nu+1}$ de kleinste afstand tot 0 ; is $y \in \Gamma_0$ en $y \notin R_\nu$, dan is $|b_{\nu+1} - y| \geq |b_{\nu+1}|$ omdat ook $b_{\nu+1} - y$ tot Γ_0 en niet tot R_ν behoort.

Zij verder Π_ν het parallelotoop, voortgebracht in R_ν door $0, b_1, \dots, b_\nu$ ($\nu = 1, \dots, n$). De punten $b_1, \dots, b_\nu$ brengen een deelrooster Γ_0^ν van Γ_0 in R_ν voort, en we zien in, dat er bij een willekeurig punt y van R_ν een punt z te vinden is, zodat geldt:

$$z \in \Gamma_0^\nu, \quad y - z \in \Pi_\nu$$

Willen we een basis van Γ_0 hebben, dan mogen we er niet van uitgaan dat $b_1, \dots, b_n$ een basis vormen (!). We kiezen allereerst a_ν in R_ν , en wel $a_1 = b_1$. Zijn $a_1, \dots, a_\nu$ gekozen, dan moet voor $a_{\nu+1}$ in elk geval gelden, dat $b_{\nu+1}$ te verkrijgen is als een geheel-tallige lineaire combinatie van $a_1, \dots, a_{\nu+1}$. Dus kan de afstand van $a_{\nu+1}$ tot R_ν niet groter zijn dan die van $b_{\nu+1}$ tot R_ν . Daar vervanging van $a_{\nu+1}$ door $-a_{\nu+1}$ geen verandering in het voortgebrachte rooster geeft, mogen we $a_{\nu+1}$ aan dezelfde kant van R_ν nemen als $b_{\nu+1}$.

Evenzo is het geoorloofd bij $a_{\nu+1}$ een punt uit Γ_0^ν op te tellen. Krachtens het bovenstaande is het dus in elk geval mogelijk $a_{\nu+1}$ in het parallelotoop $\Pi_{\nu+1}$ te kiezen. Anders gezegd: er zijn getallen $\alpha_{i\nu}$, zodat $1 \leq i \leq \nu \leq n$ en $0 \leq \alpha_{i\nu} \leq 1$ is, terwijl de punten

$$a_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_{i\nu} b_i \quad (\nu = 1, \dots, n)$$

een basis van Γ_0 vormen.

Na deze voorbereidingen beschouwen we weer de kubus $K(w)$. Zij alvast $c_3 > 12$. Indien de concentrische kubus $K(w-8)$ geen bol uit de stapeling bevat, geldt:

$$A^*(w) \omega_n < w^n - (w-12)^n < 12nw^{n-1},$$

derhalve $t^*(w) < \frac{12n}{w}$.

Wegens $t^*(w) > 4^{-n} \omega_n$ is dit onmogelijk, als c_3 geschikt gekozen is. Dus bevat $K(w-8)$ een bol.

Stel eens, dat $|b_n| = |-b_n| > 4$ is. Zij l een natuurlijk getal, zodat voor het punt $l^{-1}b_n$, dat is het punt op het lijnstuk Ob_n met afstand $l^{-1}|b_n|$ tot O , geldt: $2 \leq |l^{-1}b_n| \leq 4$. We vormen nu uit Γ_0 het rooster Γ_0' , door daarin het basispunt a_n te vervangen door $l^{-1}a_n$. Dan omvat Γ_0' het oorspronkelijke rooster Γ_0 , terwijl b.v. $l^{-1}b_n$ in Γ_0' voorkomt. Het is duidelijk, dat we de gegeven bolstapeling kunnen uitbreiden tot een andere $\Gamma_x - K(w)$ -bolstapeling, die meer bollen in $K(w)$ heeft.

Conclusie: $|b_\nu| \leq 4$ voor $\nu = 1, \dots, n$. En dan ook: $|a_\nu| \leq 4\nu$. Het rooster Γ_0 bezit dus een begrensde basis.

Stelling.

Het resultaat van no. 1 geldt ook voor $\Gamma_x - K(w)$ -bolstapelingen.

Bewijs.

Zij $K_0 = K(8n)$ de kubus met ribbe $8n$ en O tot middelpunt, zij $w > c_3$, en k een natuurlijk getal. Ons eerste doel is $A^*(w)$ en $A^*(kw)$ te vergelijken. Daartoe verdelen we $K(kw)$ in k^n kubussen $K(w)$ en nemen een maximale $\Gamma_x - K(w)$ -bolstapeling bij een van die kubussen. Is y een willekeurig punt van R_n , dan kunnen we Γ_y uit Γ_x verkrijgen, door verschuiven over een vector, gelegen in K_0 . Daaruit volgt, dat elke kubus $K(w)$ uit die verdeling tenminste $A^*(w-8n)$ bollen bevat, waarvan het middelpunt tot Γ_x behoort. Dus $A^*(kw) \geq k^n A^*(w-8n)$.

Op dezelfde wijze als in no. 1 zien we in:

$$A^*(kw) \leq k^n A^*(w+4).$$

Met dezelfde redenering als eerst, alleen met andere constanten dan c_1 en c_2 , volgt: ook $t^*(w)$ heeft een limiet voor $w \rightarrow \infty$.

Deze limiet stellen we voor door ρ_n^* . Er geldt blijkbaar: $\rho_n^* \leq \rho_n$.

Opmerking 1. Het probleem, of hier het gelijktaken of het ongelijktaken staat, is voor $n > 2$ nog onopgelost.

Opmerking 2. Een voorbeeld van een rooster, waarbij de hierboven gevormde "minimumvectoren" $b_1, \dots, b_n$ geen basis van het rooster vormen, heeft men ($n \geq 5$) in het rooster, voortgebracht door de punten $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$. Het laatste heeft afstand $\sqrt{\frac{n}{4}} > 1$ tot 0, terwijl er n vrij gelegen punten zijn met afstand 1 tot 0, n.l. de eerste $n-1$ van de opgeschreven punten en nog $(0, 0, \dots, 1)$.

4. Verband met diophantische approximaties. Zij gegeven een positief definitieve reële kwadratische vorm in n variabelen:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji}).$$

We interesseren ons voor de onderste grens M van deze vorm voor gehele waarden der variabelen, niet allen nul. Zij $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Eerst tonen we aan, dat de onderste grens M aangenomen wordt. We merken daartoe op dat $Q(x)$ continu is en $\neq 0$ voor $x \neq 0$. Dan neemt Q op de eenheidsbol $\sum x_i^2 = |x|^2 = 1$ een minimum q en een maximum p aan, waarbij $p \geq q > 0$ is. Het lichaam $Q(x) \leq q$ is bevat in de bol $|x|^2 \leq 1$, dus $Q(x) < M+1$ in $|x|^2 \leq \frac{M+1}{q}$. Slechts eindig veel punten x met gehele coördinaten voldoen aan $|x|^2 \leq \frac{M+1}{q}$. Daaronder is een punt x met $Q(x) = M$.

Onder de determinant $d(\Gamma)$ van een rooster Γ_x verstaan we de absolute waarde van de determinant van de coördinaten van n punten, die een basis van Γ_0 vormen. Die determinant is onafhankelijk van de gekozen basis, omdat twee bases van eenzelfde rooster Γ_0 door een geheel-tallige unimodulaire transformatie in elkaar over te voeren zijn. Er geldt: $d(\Gamma) > 0$.

We laten nu zien, dat bij een $\Gamma_x - K(w)$ -bolstapeling de grootte $d(\Gamma)$ tenminste gelijk is aan $\omega_n (\rho_n^*)^{-1}$. Zij $\omega_n^{-1} d(\Gamma) = \alpha$, Γ_0 een rooster, dat bij een bolstapeling behoort en $K(w)$ een kubus. Beschouw een basis van Γ ; die is bevat in een kubus $K_1: |x| \leq c_4$ met 0 tot middelpunt. Zij Π het parallelotoop, opgebouwd op die basis. We kunnen de ruimte R_n opvullen met parallelotopen, die uit Π ontstaan door verschuiven over roostervectoren. We beschouwen nog de kubussen $K(w-2)$, $K(w-2-4c_4)$, $K(w-2+4c_4)$, concentrisch met $K(w)$; we onderstellen hierbij $w > 2+4c_4$. De parallelotopen, die een punt met $K(w-2)$ gemeen hebben, zijn bevat in $K(w-2+4c_4)$; bevatten ze een randpunt van $K(w-2)$, dan liggen ze buiten $K(w-2-4c_4)$. Merken we op, dat de inhoud van Π gelijk is aan $d(\Gamma)$, dan volgt, dat het aantal punten van Γ_0 , dat tot $K(w-2)$ behoort, en dus het aantal bollen uit de $\Gamma_0 - K(w)$ -bolstapeling te schrijven is als: $w^n \{ d(\Gamma)^{-1} + O(w^{-1}) \}$. Dan is $A^*(w) \geq w^n \{ d(\Gamma)^{-1} + O(w^{-1}) \}$, $t^*(w) \geq \omega_n \{ d(\Gamma)^{-1} + O(w^{-1}) \} = \alpha^{-1} + O(w^{-1})$. Dus $\rho_n^* = \lim t^*(w) \geq \alpha^{-1}$; $d(\Gamma) \geq \omega_n (\rho_n^*)^{-1}$.

Vervolgens laten we zien, dat er een rooster is met determinant $\omega_n (\rho_n^*)^{-1}$, dat bij een bolstapeling behoort. Laat w een rij positieve getallen w_μ doorlopen met limiet ω . Bij elk getal w_μ kiezen we een kubus $K(w_\mu)$ en daarbij een maximale bolstapeling, zeg een $\Gamma_{x_\mu}^*$ - $K(w_\mu)$ -bolstapeling. Elk rooster Γ_0^* heeft een basis, bevat in de kubus $K_0 = K(8n)$ met O tot middelpunt. Dan is er een rooster Γ , waartoe zich de roosters Γ_0^* verdichten (men kan de verzameling van de roosters met zo'n basis bij geschikte metriek opvatten als een compacte metrische ruimte). Het is duidelijk, dat Γ bij een bolstapeling behoort: twee verschillende punten van Γ hebben afstand ≥ 2 .

Verder is $t^*(w_\nu) = \omega_n d(\Gamma_\nu^*)^{-1} + O(w^{-1})$, dus

$$\rho_n^* = \lim t^*(w_\nu) = \omega_n \{d(\Gamma)\}^{-1}.$$

Keren we weer terug tot onze kwadratische vorm. Zij d de absolute waarde van de coëfficiëntenmatrix. Door een substitutie $x = Ay$ gaat Q over in $\sum_{i=1}^n y_i^2$ en de punten met gehele coördinaten in de punten van een rooster met determinant $\frac{1}{a}$ als a de absolute waarde van determinant A is. Er geldt: $a^{-2} = d$, $a > 0$. We voeren nog de substitutie $y_i = \frac{1}{\sqrt{M}} z_i$ uit. Dan worden we gevoerd op een rooster Γ met determinant $\frac{1}{a} (\frac{2}{\sqrt{M}})^n$ en voor een punt $z = (z_1, \dots, z_n) \neq 0$, dat tot Γ behoort, is

$\sum_{i=1}^n z_i^2 \geq 4$. Dientengevolge behoort Γ bij een bolstapeling. Er geldt dus: $d(\Gamma) = \frac{1}{a} (\frac{2}{\sqrt{M}})^n \geq \omega_n (\rho_n^*)^{-1}$. Anderzijds volgt uit de vorige alinea, dat er kwadratische vormen bestaan, zodat in de laatste formule het gelijkteken staat.

Conclusie: $a M^{1/2} \leq \omega_n^{-1} 2^n \rho_n^*$, ofwel

$$d^{-1/n} M \leq (\omega_n^{-1} 2^n \rho_n^*)^{2/n}; \quad \text{de grootheid } d^{1/n} M, \text{ genomen}$$

over alle kwadratische vormen, heeft een bovenste grens, die aangenomen wordt. We noemen die bovenste grens γ_n . Dan is $\gamma_n = \max M(Q) d^{1/n}$ en ons uiteindelijke resultaat is:

er bestaat een wereldconstante γ_n met de volgende eigenschap: bij elke positief definitie kwadratische vorm Q in n variabelen bestaat er een stel gehele getallen $x_1, \dots, x_n$, niet allen nul, zodat $Q(x_1, \dots, x_n) \leq \gamma_n d^{1/n}$ is, terwijl er geen kleinere constante met die eigenschap bestaat; de constante γ_n is met ρ_n^* verbonden door de betrekking: $\gamma_n = 4(\omega_n^{-1} \rho_n^*)^{2/n}$.

Een schatting van ρ_n^* brengt een schatting van γ_n met zich mee, en omgekeerd. We weten nu uit no. 2, dat geldt:

$$\gamma_n \leq 4(\omega_n^{-1} \frac{n+2}{2} 2^{-n/2})^{2/n} = 2 \omega_n^{-2/n} (\frac{n+2}{2})^{2/n}.$$

Uit $\omega_n = 2\pi^{n/2} \{\Gamma(\frac{n+1}{2})\}^{-1}$ volgt $\omega_n^{-2/n} \sim \frac{1}{\pi} \frac{n}{2e}$, zodat de voor γ_n gevonden bovengrens zich voor $n \rightarrow \infty$ gedraagt als $\frac{n}{\pi e}$.

5. Het is van belang ook een benedengrens voor γ_n , en dus ook voor ρ_n^* te hebben. We zullen die niet opsporen, maar vermelden alleen, langs welke wegen dit kan gebeuren. Laat E een bol zijn in R_n met O tot middelpunt en volume < 1 . Zij $\rho(x)$ de bijbehorende karakteristieke functie, d.w.z. $\rho(x) = 1$ of 0 , al naar gelang x een punt van de bol is, of er buiten ligt. Zij Γ een rooster, waartoe O behoort. We kunnen nu enerzijds, als $f(x)$ een tot op zekere hoogte willekeurige functie in R_n is, de integraal $I = \int_R f(x) dx_1 \dots dx_n$, anderzijds de som $S(\Gamma) = \sum f(g)$, uitgestrekt over de punten $g \neq O$, die tot Γ behoren, bekijken.

Volgens een stelling van Minkowski-Hlawka-Siegel bestaat er nu een rooster Γ_0 met determinant 1 , zodat geldt: $S(\Gamma_0) < I$. We passen dit toe op $f(x) = \rho(x)$. Dan is $I < 1$ en $\sum f(g) = 1$ of 0 . Dus behoren er geen roosterpunten $\neq O$ uit Γ_0 tot E .

Zij nu E de bol met straal 2 en O tot middelpunt, dus volume $2^n \omega_n$. Uit het bovenstaande volgt dan: er is een rooster Γ^* met determinant $2^n \omega_n$, zodat behalve O geen enkel punt van Γ^* binnen E ligt. Uit de beschouwingen in 4. volgt dan: $\omega_n (\rho_n^*)^{-1} \leq 2^n \omega_n$.

Dus $\rho_n^* \geq 2^{-n}$. Verder volgt dan:

$$\rho_n \geq 2^{-n}, \gamma_n \geq 4(2^n \omega_n)^{-2/n} = \omega_n^{-2/n} \frac{n}{2\pi e}.$$

Men is er in geslaagd de voor ρ_n^* gevonden grenzen iets dichter bij elkaar te brengen, maar niet noemenswaard. Vooralsnog bestaat er een behoorlijke kloof tussen die grenzen.

Literatuur:

R.A. Rankin, On the closest packing of spheres in n dimensions, Annals of Math. 48, 1062-81.

E. Hlawka, Ausfüllung und Überdeckung konvexer Körper durch konvexe Körper, Monatshefte für Math. 53, 81-131.